

Труды Центрального Аэро-Гидродинамического Института
Выпуск 48

Н. С. АРЖАНИКОВ

К ТЕОРИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ
И ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПРОФ. ВИТОШИНСКОГО

В последнее время за границей получила известность теория проф. Витошинского.

В основе этой теории, ставящей своею целью объяснение источника сил, действующих на аэропланное крыло, лежит совершенно новая идея,—именно, объяснение происхождения этих сил в алгебраической многозначности потенциала. Проф. Витошинский рассматривает потенциал обтекаемого контура в виде некоторой алгебраической функции, известным образом связанной с поверхностью Riemann'a.

Впервые эта работа была опубликована в трудах Конгресса по теоретической и прикладной механике (Delft, 1924¹⁾), где проф. Витошинский сделал сообщение на тему „Modification du principe de circulation“, и в виде отдельной книги под заглавием: „La mécanique des profils d'aviation“ (Chiron. Paris. 1924).

В 1927 году появилась работа В. Мюллера, посвященная вопросу об обтекании профиля С. А. Чаплыгина-Жуковского, где применяется метод проф. Витошинского (Müller, „Zylinder in einer unsteady Potentialströmung“²⁾).

В виду большой важности самой тщательной оценки различных аэродинамических теорий и, так как, с другой стороны, работа проф. Витошинского сопряжена с чрезвычайно резкой критикой теории присоединенных вихрей проф. Н. Е. Жуковского, а следовательно, и всей современной аэродинамики в ее целом, то отсюда естественно проистекает необходимость полного анализа теории, предложенной Витошинским как с точки зрения чисто математической, так и с точки зрения ее физической реальности.

Настоящая статья и посвящена этому анализу.

Отправным пунктом работы проф. Витошинского „Механика аэродинамического профиля“ является критика теории проф. Жуковского. Именно автор указывает, что теория присоединенных вихрей страдает рядом существенных недостатков.

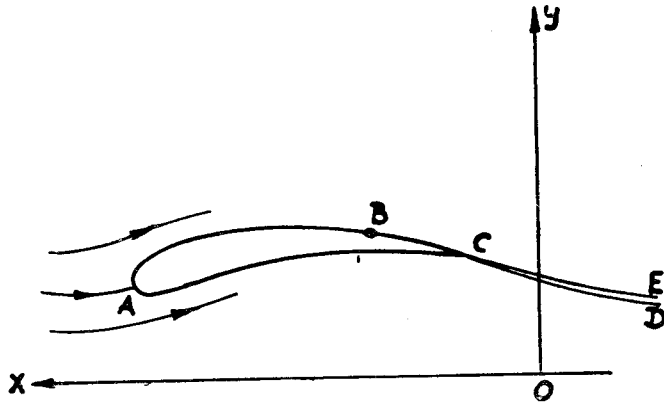
Основными недостатками является то, что она не дает лобового сопротивления, а с другой стороны то обстоятельство, что она ведет к противоречию с принципами механики. Противоречие это заключается в бесконечности кинетической энергии. Так, в § 5 своей работы

¹⁾ Proceedings of the first internat. Congress of appl. Mechanik. p. 418—426.

²⁾ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, B. 7. H. 1 S. 13.

автор говорит: „этот факт ($T = \infty$) опрокидывает основы вычислений подъемной силы поддерживающих планов аэроплана, принятых проф. Жуковским и, вообще говоря, усвоенных немецкими теоретиками и состоящих в гипотезе, что профиль перемещающийся в жидкости окружен единичным вихрем, циркуляция которого зависит от скорости переноса и от места положения точки схода на профиле“.

Проф. Витошинский примиряет теоретическую невозможность существования единичного вихря с экспериментальными данными, подтверждающими их существование тем, что может существовать пара вихрей с равными, но обратными циркуляциями. В этом случае мы будем иметь конечную кинетическую энергию. Иными словами, кинетическая энергия конечна всякий раз, когда сумма циркуляций равна нулю.



Фиг. 1.

Установивши, таким образом, неприемлемость теории присоединенных вихрей, которая может быть рассматриваема лишь, как первое приближение, автор предлагает взамен свою теорию, лишенную, по его мнению, вышеупомянутых недостатков. Ниже будет показана, с гидродинамической точки зрения, неприемлемость теории проф. Витошинского, как лишенной всякой физической реальности.

Вводя понятие двойного срыва по Прандтлю и рассматривая вопрос о вызываемых им силах, автор вводит понятие о так называемом простом срыве.

По Витошинскому обтекание аэродинамического профиля (фиг. 1) происходит так, что срыв потока осуществляется лишь в одной точке контура, именно на острие, производя на нем разрыв скорости.

В какой-нибудь другой точке контура, например, в В, срыв произойти не может, ибо на острие С будем иметь для скорости бесконечно большие значения. Разрыв этот, возникающий в точке С

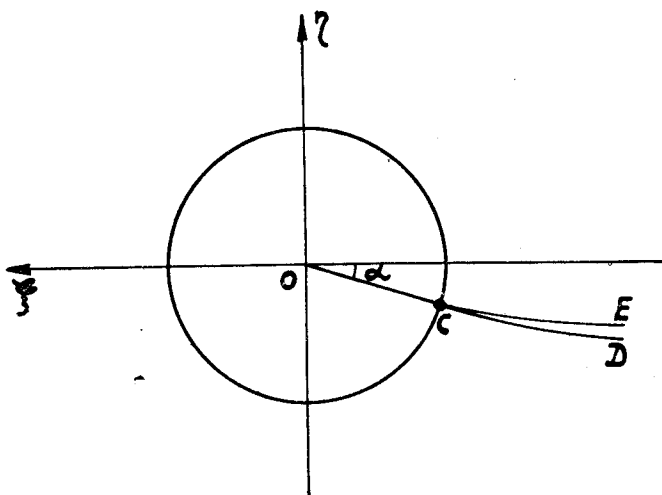
и могущий быть экспериментально обнаруженным по разности давлений около точки С, тянется внутрь жидкости в виде некоторого слоя.

Проф. Витошинский рассматривает первоначально эту задачу для обтекания цилиндра с разрывом скорости, получаемого из данного профиля конформным отображением. Аргументы точки С, соответствующей острию первоначального профиля, определяются неравенством:

$$-\pi + \alpha < \vartheta < \pi + \alpha. \quad (\alpha)$$

Тогда, очевидно, потенциал поступательного потока, обтекающего цилиндр радиуса а,

$$W_1(\zeta) = -u \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \quad (1)$$



Фиг. 2.

надо дополнить выражением, характеризующим разрыв скорости, при этом так, чтобы он давал кинетической энергии конечное значение.

При указанных условиях, добавочный потенциал примет вид:

$$W_2(\zeta) = iku a \frac{\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta} - \sqrt{\frac{ae^{i\alpha}}{ae^{i\alpha}}}}}{\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta} + \sqrt{\frac{ae^{i\alpha}}{ae^{i\alpha}}}}}. \quad (2)$$

В силу (α) полюс функции (2): $\zeta = -ae^{i(\alpha \pm 2\pi)}$ лежит на втором листе поверхности Римана. В таком случае, полный потенциал представится в виде:

$$W(\zeta) = -u \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) + iku a \frac{\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta} - \sqrt{\frac{ae^{i\alpha}}{ae^{i\alpha}}}}}{\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta} + \sqrt{\frac{ae^{i\alpha}}{ae^{i\alpha}}}}}. \quad (3)$$

Дифференцируя (3), найдем:

$$\frac{dW}{d\zeta} = v_x - iv_y.$$

Выполняя условия $v_c = 0$ в точке $\vartheta = \pi + \alpha$, найдем: $k = -4 \sin \alpha$ и окончательно будем иметь:

$$W(\zeta) = -u \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - 4iua \sin \alpha \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{ae^{i\alpha}}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{ae^{i\alpha}}} \quad (4)$$

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = v_x - iv_y = -u \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) - \frac{4iu \sqrt{a^3 e^{i\alpha}} \sin \alpha}{\sqrt{\zeta} (\sqrt{\zeta} + \sqrt{ae^{i\alpha}})^2} \quad (5)$$

Так как $W = \varphi + i\psi$, то разделяя в (4) действительную и мнимую часть и приравнявая $\psi = 0$, найдем:

$$1) \quad r - a = 0$$

$$2) \quad \frac{r+a}{r} \sin \vartheta + \frac{4a \sin \alpha}{r+a+2\sqrt{ar \cos \frac{\vartheta-\alpha}{2}}} = 0.$$

Полагая на CE: $\vartheta = \vartheta_1 + \pi$, а на CD: $\vartheta = \vartheta_1 - \pi$, уравнение слоя разрыва (ограничиваясь малыми значениями α и ϑ_1) представится в виде:

$$\vartheta_1 = \frac{4\alpha ar}{(r+a)^2} + \frac{4\alpha^2 a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}} (r-a)^2}{(r+a)^5},$$

откуда для толщины δ слоя будем иметь:

$$\delta = r(\vartheta'_1 - \vartheta_1) = \frac{8\alpha^2 a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}} (r-a)^2}{(r+a)^5}. \quad (6)$$

Характер слоя разрыва явствует из формулы (6). В самом деле, при $r = a$, т. е. в точке C, $\delta = 0$; при $r = \infty$ $\delta = 0$, и, наконец, на расстоянии $r \cong 13,6$ а слой будет иметь максимальную толщину

$$\delta_{\max} = 1,306 \alpha^2 a. \quad (6^1)$$

Допустим, что связь данного аэродинамического профиля с цилиндром устанавливается помощью соотношения $z = F(\zeta)$. В таком случае, подставляя (5) в формулу С. А. Чаплыгина-Блязюса¹⁾

$$P_y - iP_x = -\frac{1}{2} \rho \int_C \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz}, \quad (7)$$

¹⁾ Проф. С. А. Чаплыгин. О давлении плоскопараллельного потока. 1910 г. Blasius. Funktionentheoretischen Methoden in der Hydrodynamik. Journal für Math. und physik. 1910.

получим:

$$P_y - iP_x = \frac{\rho u^2}{2} \int_{(CAC)} \left[1 - \frac{a^2}{\zeta^2} + \frac{4ia \frac{2}{3} e^{\frac{i\alpha}{2} \sin \alpha}}{V \zeta (V \zeta + V a e^{i\alpha})^2} \right]^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta, \quad (8)$$

откуда по выполнении интеграции найдем силы, действующие на аэродинамический профиль.

Эти рассуждения имеют силу лишь при предположении, что первоначальный аэродинамический профиль имеет всего лишь одно острие С (фиг. 1), при наличии же второго необходимо обратиться к вычету Коши, относительно полюса, соответствующему этому второму острию.

Рассмотрим прямоугольный профиль для которого вышеупомянутая зависимость приобретает следующий вид:

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} e^{2i\alpha}. \quad (I)$$

Преобразуем предварительно интеграл (8) следующим образом: положим $\zeta = \zeta'^2 a e^{i\alpha}$.

В таком случае будем иметь:

$$P_y - iP_x = -\rho u^2 a e^{i\alpha} \int_{+i}^{+1} \left[1 - \frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta'^4} + \frac{4ie^{-i\alpha} \sin \alpha}{\zeta'(\zeta' + 1)^2} \right]^2 \frac{d\zeta}{dz} \zeta' d\zeta'.$$

Вместо пути интеграции ABC, возьмем ADEFC, что возможно, ибо в области ADEFCBA подынтегральная функция голоморфна. Будем теперь стремить точки F и D в бесконечность. В пределе получим:

$$\int_{ADEFC} = \int_{AD} + \int_{FC},$$

где D и F бесконечно удалены.

Полагая вдоль AD: $\zeta' = -i\eta'$ и вдоль FC: $\zeta = +i\eta'$ и вводя действительное переменное t , найдем:

$$P_y - iP_x = 16\rho u^2 a \sin \alpha \int_1^\infty \left[\frac{(t^2 - 1)^2}{t^4 (t^2 + 1)} - \frac{2ie^{-i\alpha} \sin \alpha (t^2 - 1)(3t^2 + 1)}{t^4 (t^2 + 1)^4} \right] \frac{d\zeta}{dz} dt, \quad (9)$$

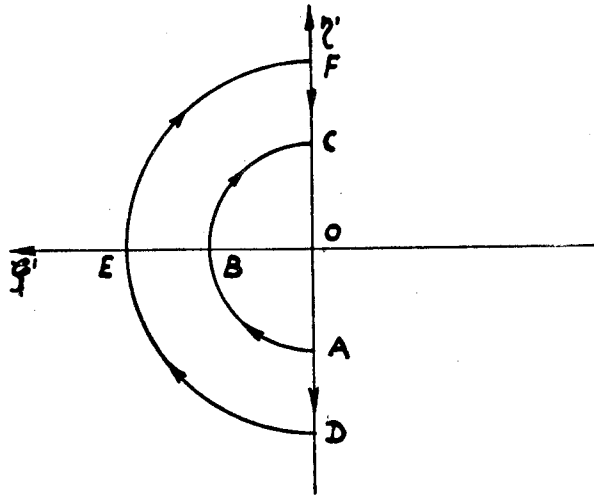
причем модуль t изменяется от 1 до ∞ . В силу (I) имеем

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{t^4}{t^4 - 1}. \quad (I')$$

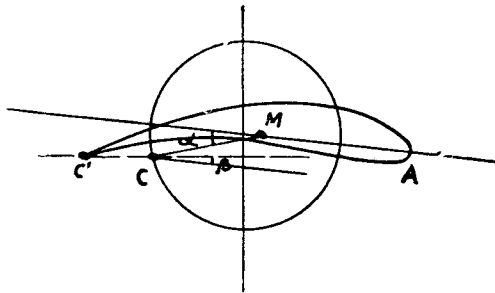
Вставляя (I') в (9) и обращаясь к полувычету относительно полюса $\zeta = ae^{i\alpha}$, после выполнения интегриации найдем:

$$P_y - iP_x = 8\rho u^2 a e^{-i\alpha} \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

т. е. результирующее давление нормально к профилю.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В качестве второго примера укажем на работу Мюллера, посвященную обтеканию профиля Чаплыгина - Жуковского (инверсия параболы), для которого упомянутая зависимость в обозначениях Мизеса принимает вид:

$$z = \zeta + \frac{\rho^2 e^{2i\beta}}{\zeta + \zeta_0}, \quad (II)$$

где для соответствия точек C и C¹ нужно положить:

$$\zeta_0 = ae^{i\alpha} - \rho e^{i\beta}.$$

Угол $\alpha - \beta = \varphi$ есть угол между осями крыла, а β —угол между направлением потока и 2-ой осью крыла. Вводя в $\frac{dz}{dz}$ попережнему $\zeta = -at^3 e^{i\alpha}$ и, считая

$$\frac{\zeta_0}{a} e^{-i\alpha} = 1 - \frac{P}{a} e^{-i\varphi} = \varepsilon$$

малой величиной, получим:

$$\frac{dz}{dz} = \frac{t^4}{t^4 - 1} - \frac{2\varepsilon t^2}{(t^4 - 1)(t^2 + 1)}.$$

Вводя это в интеграл (9) и производя чрезвычайно длинные выкладки, найдем окончательно:

$$\begin{aligned} P_y &= 8\rho u^2 a \sin(\varphi + \beta) \\ P_x &= 8\rho u^2 a \sin(\varphi + \beta) \left\{ 0,064 \frac{P}{a} \sin \varphi + 0,096 \sin(\varphi + \beta) + \right. \\ &\quad \left. + 0,012 \frac{P}{a} \cos \varphi \sin 2(\varphi + \beta) \right\}. \end{aligned}$$

В частности для профиля № 430 Гёттингенской лаборатории, для которого:

$$a = 3,25, T = 11,8, p = 2,93, \frac{P}{a} = 0,9, \varphi = 7^\circ,$$

имеем следующую таблицу:

β'	β	$C_a \lambda=0$	$C_w \lambda=0$	C_a (опыт)	C_w (опыт)
$-6,1^\circ$	$-4,1^\circ$	22	0,28	14	1,32
$-0,2^\circ$	$1,8^\circ$	67	1,68	56,0	3,14
$1,3^\circ$	$3,3^\circ$	77	2,19	66,0	4,00
$4,2^\circ$	$6,2^\circ$	100	3,41	87,0	6,33
$14,5^\circ$	$16,5^\circ$	176	9,54	137,0	17,2

Как уже упоминалось вначале, отправным пунктом в построении новой аэродинамической схемы проф. Витошинского являлась критика теории проф. Н. Е. Жуковского. Бесконечность кинетической энергии наносит ей, по мнению проф. Витошинского, сокрушительный удар, поскольку она ведет к противоречию с принципами механики.

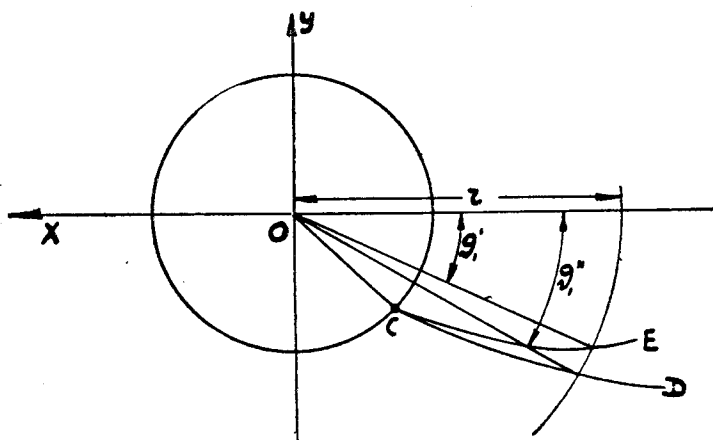
Необходимо поэтому осветить вопрос о том, насколько благополучна в этом отношении разбираемая нами теория.

Выше указывалось, что выбор добавочного разрывного потенциала для цилиндра был ограничен условием конечности T . В самом деле, рассматривая интеграл:

$$T = \rho \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right) r dr d\theta$$

и производя вычисления, мы найдем, что T конечно.

С другой стороны, так как обтекание цилиндра происходит так, что в точке C образуется слой разрыва, тянущийся внутрь жидкости,



Фиг. 5.

и так как относительно этого слоя автор говорит, что „слой разрыва заполнен жидкостью в вихревом движении“, то необходимо для решения вопроса о конечности T подсчитать площадь этого хвоста.

Будем иметь, обозначая площадь хвоста через S :

$$S = \int \int r dr d\theta = \int r dr \int d\theta = \int r (\theta_1'' - \theta_1') dr.$$

Так как с другой стороны:

$$r (\theta_1'' - \theta_1') = \frac{8 \alpha^2 a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}} (r-a)^2}{(r+a)^5},$$

то

$$S = 8 \alpha^2 a^{\frac{3}{2}} \int_a^\infty \frac{r^{\frac{5}{2}} (r-a)^2}{(r+a)^5} dr.$$

Но

$$J = \int_a^{\infty} \frac{r^{\frac{5}{2}} r^2}{r^5} dr = \int_a^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r}} = [2\sqrt{r}]_a^{\infty} = \infty,$$

следовательно:

$$S = \infty.$$

Таким образом, обращаясь к принципу относительности, заключаем, что цилиндр, двигаясь в покоящейся на бесконечности жидкости, будет нести за собой вышеупомянутый жидкий хвост, что даст для живой силы бесконечно большое значение.

Установивши, таким образом, вопрос о кинетической энергии, перейдем теперь к выяснению физической реальности слоя разрыва. Следует заметить, что уже само по себе предположение о том, что в точке С контура мы имеем разность давлений, с гидродинамической точки зрения совершенно не реально, ибо очевидно, что хвост будет сбиваться в сторону меньших давлений.

Покажем сейчас невозможность физического существования этого слоя разрыва. Для этого поступим следующим образом: рассмотрим обтекание цилиндра с разрывом скорости и подсчитаем по формуле С. А. Чаплыгина соответствующее давление. Затем по этой же формуле подсчитаем давление на бесконечно большой цилиндр.

В том случае, если окажется разность давлений, то она придется за счет хвоста, в силу чего его существование физически станет невозможным.

В самом деле, так как

$$\frac{dw}{dz} = -u \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{4iu\sqrt{a^2 e^{i\alpha}} \sin \alpha}{\sqrt{z} (\sqrt{z} + \sqrt{a^2 e^{i\alpha}})^2},$$

то пользуясь формулой

$$P_y - iP_x = -\frac{\rho}{2} \int_{(K)} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

найдем

$$P_y - iP_x = -\frac{\rho}{2} u^2 \int_{(K)} \left[\left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{4i\sqrt{a^2 e^{i\alpha}} \sin \alpha}{\sqrt{z} (\sqrt{z} + \sqrt{a^2 e^{i\alpha}})^2} \right]^2 dz.$$

Производя аналогичные (8) и (9) преобразования и вводя переменное t , найдем:

$$P_y - iP_x = 16\rho u^2 a \sin \alpha \int_1^{\infty} \left[\frac{(t^2 - 1)^2}{t^4 (t^2 + 1)} - \frac{2ie^{-i\alpha} \sin \alpha (t^2 - 1)^2 (3t^2 + 1)}{t^4 (t^2 + 1)^4} \right] dt.$$

Вычисляя отдельно интегралы

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{(t^2 - 1)^2}{t^4 (t^2 + 1)} dt,$$

$$J_2 = \int_1^{\infty} \frac{(t^2 - 1)^2 (3t^2 + 1)}{t^4 (t^2 + 1)^4} dt,$$

окончательно получим:

$$P_y - i P_x = 16 \rho u^2 a \sin \alpha [0.705 - 0.312 i e^{-i\alpha} \sin \alpha].$$

Вычисляя интеграл вдоль бесконечно большого цилиндра K, нетрудно убедиться, что будем иметь:

$$P_y - i P_x = 0.$$

В самом деле,

$$\int_{(K)} \frac{dz}{V z (V \bar{z} + V a e^{i\alpha})^2} = 0 \quad (\alpha)$$

$$\int_{(K)} \frac{dz}{V z^3 (V \bar{z} + V a e^{i\alpha})^2} = 0 \quad (\beta)$$

$$\int_{(K)} \frac{dz}{z (V \bar{z} + V a e^{i\alpha})^2} = 0 \quad (\gamma)$$

Действительно, полагая в (α) $z = R e^{i\varphi}$ и рассматривая интеграл

$$\int_K \frac{dz}{z^3} = \int_0^{2\pi} \frac{R e^{i\varphi} d\varphi}{R^3 e^{i\frac{3\varphi}{2}}} = \frac{i}{V R} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{i\varphi}{2}} d\varphi.$$

Следовательно:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_K \frac{dz}{z^3} = 0.$$

Аналогично для (β) и (γ).

Таким образом, разность давлений, приходящаяся на бесконечный хвост, существует и делает тем самым невозможным самый факт его существования, а самую теорию лишает всякой физической реальности.

Нужно заметить, что равенство нулю давления по бесконечно большому цилиндру не является в этом случае чем-то неожиданным. В одной из своих неопубликованных работ профессору С. А. Чаплыгину удалось показать, что если мы имеем дело с обтеканием контура, происходящим таким образом, что струи идут в бесконечность не по параболическому закону, оставаясь в бесконечности на постоянном расстоянии друг от друга, или же смыкаясь, то мы будем иметь давление равное нулю (этот результат принадлежит также Brillouin¹⁾).

Иными словами, система, состоящая из цилиндра и бесконечного хвоста, двигаясь в направлении OX в покоящейся жидкости, не испытывает с ее стороны лобового сопротивления.

Отсюда естественный вывод: теория проф. Витошинского является любопытной лишь с математической, отнюдь не с аэродинамической, точки зрения попыткой дать новую схему „механики аэродинамического профиля“.

¹⁾ Annales de Chimie et de physique 1911. P. 145.

S u m m a r y

This work presents an analysis of two articles by Prof. C. Witoszynski „Mécanique des Profils d'Aviation“ and „Modification du Principe de Circulation“, containing some critical observations concerning the theory of bound vortices of Prof. N. E. Joukowski, and the exposition of a new theory, proposed by the author and based on the assumption, that the source of aerodynamical forces is to be sought in the algebraically multivalued potential.

The present work shows the inconsistency of Witoszynski's theory, giving an infinite value for the kinetic energy, and proves the complete impossibility of the existence of a discontinuity layer.

Finally the conclusion is made, that a system, consisting of a cylinder and a discontinuity layer, when moving through a fluid at rest, encounters no resistance.
